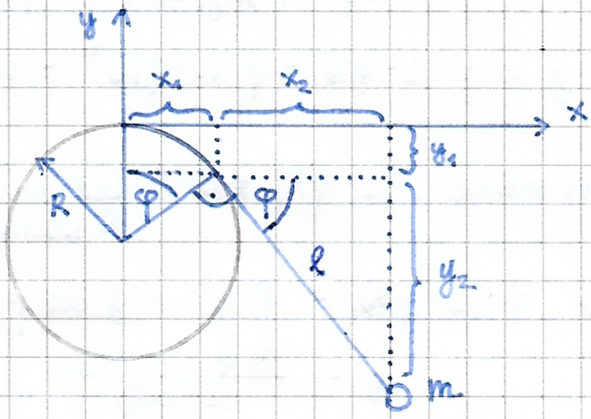
① **Kochrezept**: Lagrange I und II ↗ Anhang

② **Beispiel für Lagrange II**:



- Der Faden ist am obersten Punkt der Scheibe befestigt
- **keine** starre Pendelstange

- Pendellänge L:

$$L = \varphi \cdot R + \ell = \text{const.}$$

$$x_1 = \sin\varphi \, R$$

$$x_2 = \cos\varphi \, \ell = \cos\varphi \, (L - \varphi R)$$

$$\underline{x = x_1 + x_2 = R \sin\varphi + (L - \varphi R) \cos\varphi}$$

$$y_1 = R - R\cos\varphi \qquad y_2 = \ell \sin\varphi = (L - \varphi R) \sin\varphi$$

$$\underline{-y = y_1 + y_2 = R(1 - \cos\varphi) + (L - \varphi R) \sin\varphi}$$

$$\dot{x} = R\cos\varphi \, \dot\varphi + (-\dot\varphi R) \cos\varphi - (L - \varphi R) \sin\varphi \, \dot\varphi$$

$$= \underline{(\varphi R - L) \sin\varphi \, \dot\varphi}$$

$$-\dot{y} = R \sin\varphi \, \dot\varphi + (-\dot\varphi R) \sin\varphi + (L - \varphi R) \cos\varphi \, \dot\varphi$$

$$= \underline{(L - \varphi R) \cos\varphi \, \dot\varphi}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(L - \varphi R)^2 \left[\sin^2\varphi \, \dot\varphi^2 + \cos^2\varphi \, \dot\varphi^2\right]$$

$$= \frac{m}{2}(L - \varphi R)^2 \dot\varphi^2$$

$$U = mg\,y = -mg\left[R(1 - \cos\varphi) + (L - \varphi R)\sin\varphi\right]$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}(L - \varphi R)^2 \dot\varphi^2 + mg\left[R(1 - \cos\varphi) + (L - \varphi R)\sin\varphi\right]$$

Euler-Lagrange-Gleichung aufstellen:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m(L - \varphi R) R\dot\varphi^2 + mg\left[\cancel{R\sin\varphi} + (L - \varphi R)\cos\varphi - \cancel{R\sin\varphi}\right]$$

$$= m(\varphi R - L) R \dot\varphi^2 + mg(L - \varphi R)\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m(L - \varphi R)^2 \dot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = m\ddot\varphi(L - \varphi R)^2 - 2m\dot\varphi(L - \varphi R) R\dot\varphi$$

$$= m\ddot\varphi(L - \varphi R)^2 - 2mR\dot\varphi^2(L - \varphi R)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = 0$$

$$-m(L-\varphi R) R\dot\varphi^2 + mg\cos\varphi\,(L-\varphi R) - m\ddot\varphi\,(L-\varphi R)^2 + 2mR\dot\varphi^2(L-\varphi R) = 0$$

$$g\cos\varphi\,(L-\varphi R) - \ddot\varphi\,(L-\varphi R)^2 + R\dot\varphi^2(L-\varphi R) = 0$$

Annahme: $(L-\varphi R) \neq 0$ Seil wickelt sich nicht auf ≙ kleinen Auslenkungen

$$\Rightarrow \ddot\varphi\,(L-\varphi R) = R\dot\varphi^2 + g\cos\varphi$$

$$\ddot\varphi = \frac{R\dot\varphi + g\cos\varphi}{(L-\varphi R)}$$

3) Kanonischer Impuls und Hamilton-Funktion:

Kanonischer Impuls: $\boxed{p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}} \overset{\text{konservative Kräfte}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot q_i}$

Beispiel: Teilchen in Polarkoordinaten: $T = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)$

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot r} = m\dot r \quad \text{(Radialimpuls)}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = m r^2 \dot\varphi \quad \text{(Drehimpuls)}$$

Totale Zeitableitung der Lagrange Funktion: ↗ Skript S.61

$$\frac{d}{dt}L = \sum_i \Big[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)} \dot q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \underbrace{\ddot q_i}_{=\frac{d}{dt}\dot q_i}\Big] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_i \Big[\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\Big] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big[\sum_i \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\Big) - L\Big] = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Ist die Lagrange-Funktion nicht explizit zeitabhängig, so ist die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße:

$$\boxed{H := \sum_i \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L} = \sum_i \dot q_i p_i - L = \text{const.}$$

Bemerkung:

Die Hamilton-Funktion beschreibt die Gesamtenergie des Systems E wenn folgendes gilt:

1) Konservative Kräfte
2) Koordinatentrafo in kartesische Koordinaten zeitunabhängig

3.) Die kinetische Energie ist von der Form: $T = \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$

Diese Voraussetzungen sind jedoch meist gegeben!

<u>Beispiel</u>: Hamilton Funktion harmonischer Oszillator 1D

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \qquad U = \frac{k}{2} x^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2$$

$$\Rightarrow H = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L$$

$$= m\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2$$

$$= \underbrace{\frac{m}{2}\dot{x}^2}_{= T} + \underbrace{\frac{m}{2}\omega^2 x^2}_{= U}$$

$$x(t) = \cos(\omega t + \varphi)$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad k = m\omega^2$$

$$\underline{\underline{H = E}}$$